

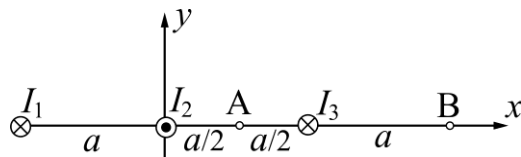
1. За случај тројичног вода приказаног на слици 1 одредити:

а) Вектор магнетне индукције у тачкама А $(\frac{a}{2}, 0)$ и В $(2a, 0)$.

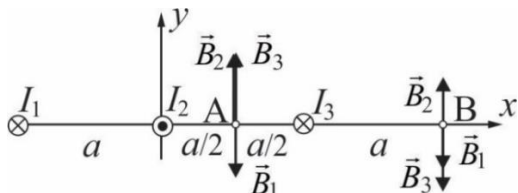
б) Вектор подужне силе на проводник са струјом I_3 .

Систем се налази у вакууму.

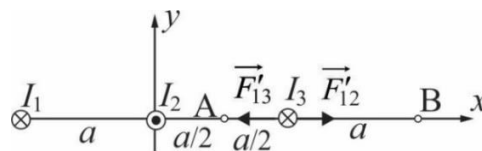
Познато је: $I_1 = 2I_2 = 2I_3 = 400\text{А}$, $a = 1\text{м}$.



Слика 1



Слика 1.1



Слика 1.2

а) Вектори магнетне индукције које стварају поједини проводници приказани су на слици 1.1, а њихови интензитети у тачки А су:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi \frac{3a}{2}} = \mu_0 \frac{I_1}{3\pi a} = \mu_0 \frac{2I_2}{3\pi a},$$

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi \frac{a}{2}} = \mu_0 \frac{I_2}{\pi a},$$

$$B_3 = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi \frac{a}{2}} = \mu_0 \frac{I_3}{\pi a} = \mu_0 \frac{I_2}{\pi a}.$$

Интезитет вектора магнетне индукције у тачки А износи:

$$B_A = B_2 + B_3 - B_1 = \frac{4}{3} \frac{\mu_0 I_2}{\pi a} = \frac{32}{3} 10^{-5} \text{Т},$$

па је вектор магнетне индукције у тачки А

$$\vec{B}_A = \frac{32}{3} 10^{-5} (\hat{y}) \text{Т}.$$

Вектори магнетне индукције које стварају поједини проводници у тачки В приказани су на слици 1.1, а њихови интензитети су:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi 3a} = \mu_0 \frac{2I_2}{6\pi a},$$

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi 2a} = \mu_0 \frac{I_2}{4\pi a},$$

$$B_3 = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi a} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi a}.$$

Магнетна индукција у тачки В износи:

$$B_B = B_2 - B_3 - B_1 = -\frac{7}{12} \frac{\mu_0 I_2}{\pi a} = -\frac{14}{3} 10^{-5} \text{ Т},$$

$$\vec{B}_B = \frac{14}{3} 10^{-5} (-\hat{y}) \text{ Т}.$$

б) Подужна сила којом проводник са струјом I_1 делује на проводник са струјом I_3 (слика 1.2) је

$$F'_{13} = \mu_0 \frac{I_1 I_3}{2\pi 2a} = \mu_0 \frac{I_2^2}{2\pi a},$$

док је подужна сила којом проводник са струјом I_2 делује на проводник са струјом I_3

$$F'_{23} = \mu_0 \frac{I_2 I_3}{2\pi a} = \mu_0 \frac{I_2^2}{2\pi a},$$

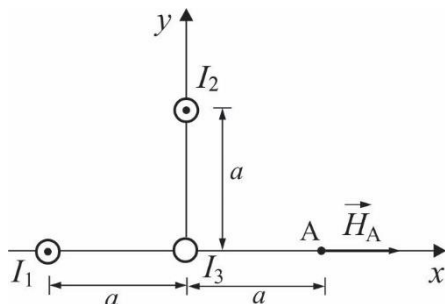
па је резултујућа подужна сила $F'_3 = F'_{23} - F'_{13} = 0 \text{ N/m}$.

2. Кроз два неограничено дуга, танка проводника, постављена паралелно z оси правоуглог координатног система и распоређена као на слици 2, протичу струје I_1 и I_2 , задатих смерова. Систем се налази у вакууму.

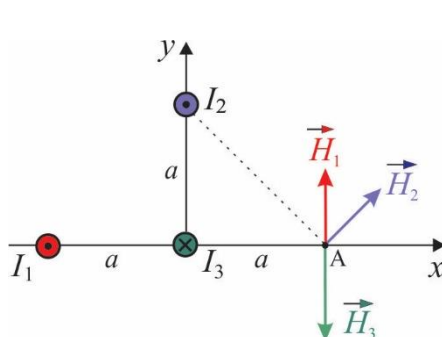
а) Одредити смер и јачину струје I_3 тако да вектор јачине магнетног поља у тачки А буде правца и смера као на слици и интензитета H_A .

б) Одредити подужну силу на проводник са струјом I_3 .

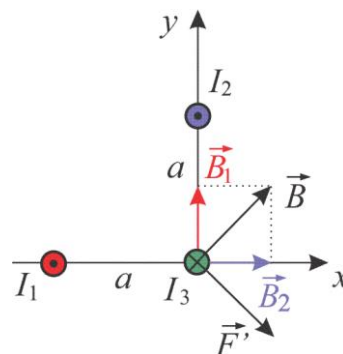
Познато је: $I_2 = 2I_1$, $a = 0.5 \text{ m}$ и $H_A = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{А}}{\text{m}}$.



Слика 2



Слика 2.1



Слика 2.2

а) Да би вектор јачине магнетног поља у тачки А био задатог правца и смера, смер струје I_3 мора бити као што је приказано на слици 2.1.

На основу резултујућег вектора магнетног поља могу се поставити два услова:

$$(1) \sum H_{Ax} = H_A,$$

$$(2) \sum H_{Ay} = 0.$$

Како је

$$\sum H_{Ax} = H_{2x} = \frac{I_2}{2\pi a\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{I_2}{4\pi a} \text{ и}$$

$$\sum H_{Ay} = H_{1y} + H_{2y} - H_{3y} = \frac{I_1}{2\pi 2a} + \frac{I_2}{2\pi a\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{I_3}{2\pi a},$$

решавањем система једначина добија се: $I_1 = 0.5 \text{ A}$, $I_2 = 1 \text{ A}$ и $I_3 = \frac{3}{4} \text{ A}$.

б) Индукција на месту струјног проводника I_3 је $\vec{B} = B_2\hat{x} + B_1\hat{y}$ (слика 2.2),

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right)^2} = \frac{\mu_0 I_1 \sqrt{5}}{2\pi a} = 2\sqrt{5} \cdot 10^{-7} \text{ T},$$

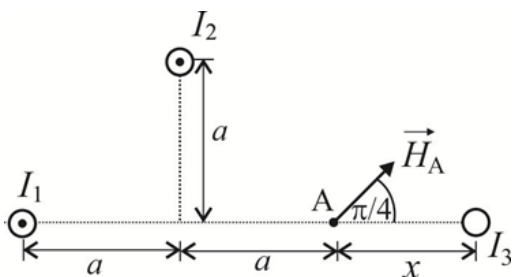
па је сила на струјни проводник са струјом I_3

$$\vec{F} = I_3 \vec{l} \times \vec{B},$$

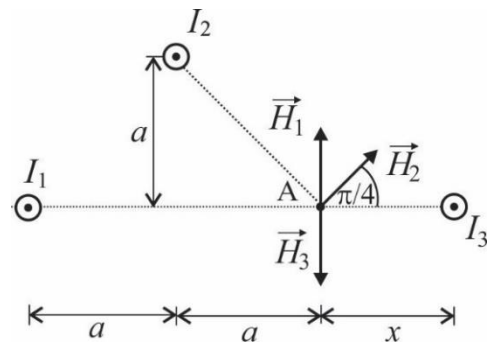
а интензитет подужне силе је

$$F' = I_3 B = 3.354 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

3. Кроз два неограничено дуга, танка проводника, распоређена као на слици 3, протичу струје I_1 и I_2 , задатих смерова. Систем се налази у вакууму. Одредити смер струје I_3 кроз проводник и његово растојање, x , од тачке А, тако да вектор јачине магнетног поља у тачки А гради угао $\pi/4$ са позитивним смером x -осе. Одредити и интензитет вектора јачине магнетног поља H_A . Познато је: $I_1 = I_2 = 0.5 \text{ A}$, $I_3 = 0.1 \text{ A}$, $a = 10 \text{ cm}$.



Слика 3



Слика 3.1

На основу задатог правца и смера вектора јачине магнетног поља очигледно је да важи

$$\vec{H}_A = H_{Ax}\hat{x} + H_{Ay}\hat{y},$$

$$H_{Ax} = H_{Ay} = \frac{\sqrt{2}}{2} H_A.$$

Да би био задовољен горе написан услов, смер струје I_3 мора бити као што је приказано на слици 3.1.

Интензитети вектора јачине магнетног поља и компоненте које, у тачки А, ствара сваки од проводника износе:

$$H_1 = \frac{I_1}{4\pi a}, H_{1x} = 0, H_{1y} = H_1,$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\sqrt{2}\pi a}, H_{2x} = H_2 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} H_2, H_{2y} = H_2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} H_2$$

$$H_3 = \frac{I_3}{2\pi x}, H_{3x} = 0, H_{3y} = -H_3$$

$$H_{Ax} = H_{2x} \Rightarrow H_A = H_2$$

$$H_{Ay} = H_{1y} + H_{2y} + H_{3y} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} H_A = H_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} H_2 - H_{3y} \Rightarrow H_1 = H_3$$

Из претходне једнакости се одређује растојање проводника са струјом I_3 од тачке А,

$$\frac{I_1}{4\pi a} = \frac{I_3}{2\pi x} \Rightarrow x = \frac{2aI_3}{I_1} = 4 \text{ cm.}$$

Интензитет вектора јачине магнетног поља у тачки А износи

$$H_A = H_2 = \frac{I_2}{2\sqrt{2}\pi a} = 0.5627 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

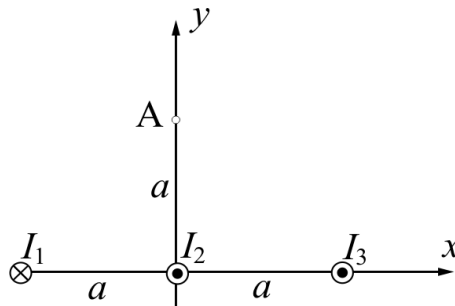
4. За случај тројичног вода приказаног на слици 4 одредити:

а) Вектор магнетне индукције у тачки А (0, a).

б) Вектор подужне силе на проводник са струјом I_3 .

Систем се налази у вакууму.

Познато је: $I_1 = 2I_2 = 2I_3 = 200 \text{ A}$, $a = 1 \text{ m}$.



Слика 4

$$\text{а) } \vec{B}_A = -\mu_0 \frac{I}{4\pi a} \hat{x} - \mu_0 \frac{3I}{4\pi a} \hat{y} = -\mu_0 \frac{I}{4\pi a} (\hat{x} + 3\hat{y}),$$

$$B_A = \mu_0 \frac{I}{4\pi a} \sqrt{10} = 10\sqrt{10} \mu\text{T}, \varphi_{B_A} = \pi + \arctg \frac{B_{Ay}}{B_{Ax}} = \pi + \arctg 3 \approx 251.6^\circ.$$

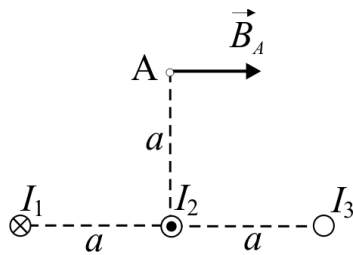
$$\text{б) } F'_3 = 0 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

5. Кроз три неограничено дуга танка проводника протичу струје I_1 , $I_2 = \pi \text{ A}$ и I_3 (слика 5).

а) Одредити смер и јачину струје I_3 , као и јачину струје I_1 тако да вектор магнетне индукције у тачки А има правац и смер као на слици, а интензитет $B_A = 2\pi \mu\text{T}$. Систем се налази у вакууму.

б) За тако одређене струје I_1 и I_3 , одредити вектор подужне силе на проводник са струјом I_3 .

Познато је: $a = 0.1 \text{ m}$.

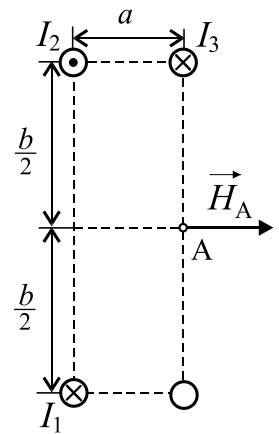


Слика 5

а) $I_1 = I_3 = 2\pi$ А, док је смер струје I_3 исти као смер струје I_1 .

б) $\vec{F}'_3 = 0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

6. Кроз три неограничено дуга танка паралелна проводника, који су у попречном пресеку распоређени у теменима правоугаоника, протичу струје I_1 , I_2 и I_3 смера као на слици 6. Одредити смер и вредност струје кроз проводник који се налази у четвртном темну правоугаоника да би укупно поље у тачки А било правца и смера као на слици 7 и интензитета H_A . Систем се налази у вакууму. Познато је: $I_1 = I_2 = 0.5\text{ А}$, $I_3 = 1\text{ А}$, $a = 1\text{ м}$, $b = 2\sqrt{3}\text{ м}$, $H_A = \sqrt{3}/3\pi \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

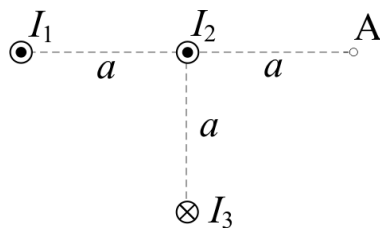


Слика 6

Јачина струје је $I_4 = 9/4\text{ А}$, док смер одговара смеровима струја I_1 и I_3 .

7. Кроз три неограничено дуга танка проводника протичу струје I_1 , I_2 и I_3 задатог смера (слика 7). Одредити вектор магнетне индукције у тачки А. Систем се налази у вакууму.

Нумерички подаци: $a = 1\text{ м}$, $I_1 = 2I$, $I_2 = I$, $I_3 = 4I$, $I = 1\text{ А}$.

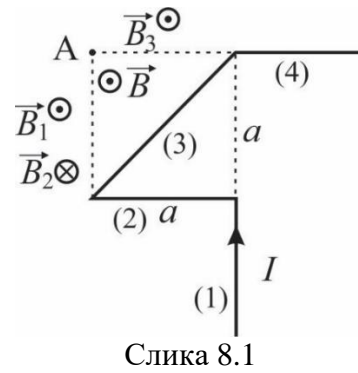
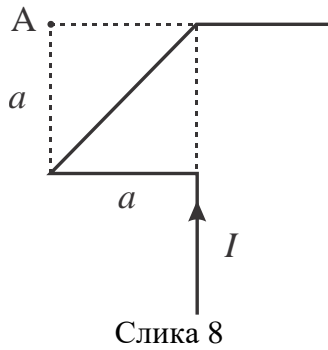


Слика 7

$$\vec{B}_A = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \hat{x} = 0.4 \hat{x} \text{ мТ.}$$

8. Неограничено дуг проводник, савијен као на слици 8, налази се у вакууму. Одредити вектор магнетне индукције у тачки А ако кроз проводник протиче струја I .

Познато је: $a = 10\text{ см}$, $I = 1\text{ А}$.



Овај струјни проводник се може посматрати као систем четири струјна проводника, два са једне стране ограничена, (1) и (4), и два струјна проводника коначне дужине, (2) и (3) (слика 8.1). Смерови вектора магнетне индукције појединих делова проводника приказани су на слици 8.1. Резултујући вектор магнетне индукције смера је приказаног на слици а интензитет му је:

$B_A = B_1 - B_2 + B_3 + B_4$, где је

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = / \theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 = \frac{\pi}{4} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_3 - \cos \theta_4) = / \theta_3 = \frac{\pi}{4}, \theta_4 = \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

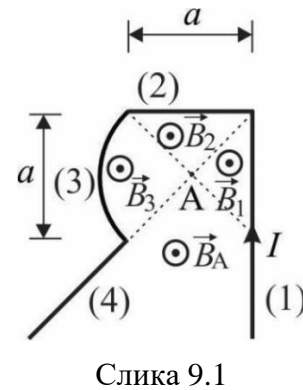
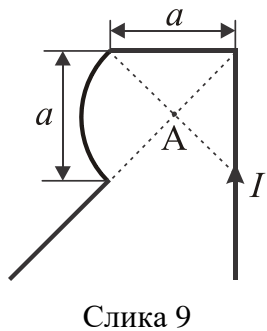
$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a \frac{\sqrt{2}}{2}} (\cos \theta_5 - \cos \theta_6) = / \theta_5 = \frac{\pi}{4}, \theta_6 = \frac{3\pi}{4} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

$$B_4 = 0,$$

$$B_A = B_1 - B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (3 - \sqrt{2}),$$

$$B_A = 1.586 \mu T.$$

9. Неограничено дуг проводник налази се у вакууму и савијен је као на слици 9. Одредити вектор магнетне индукције у тачки А када кроз проводник протиче константна струја I . Познато је: $a = 1 \text{ cm}$, $I = 10 \text{ A}$.



Укупна индукција у тачки А је

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4.$$

С обзиром да су вектори магнетне индукције коју стварају поједини делови проводника истог правца и смера, интензитет вектора магнетне индукције у тачки А биће:

$$B_A = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Индукције појединих делова су:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} (\cos \theta_3 - \cos \theta_4) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sqrt{2}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \alpha = \frac{\mu_0 I}{4a\sqrt{2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

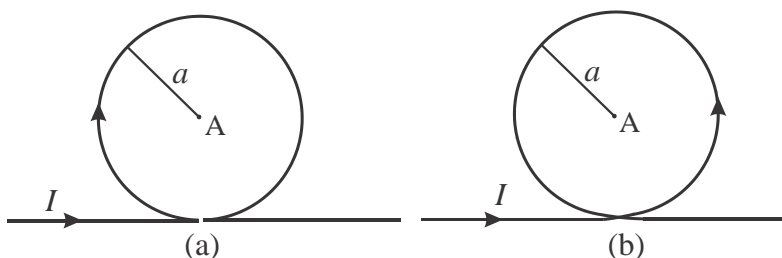
$$B_4 = 0,$$

вектор магнетне индукције у тачки А је:

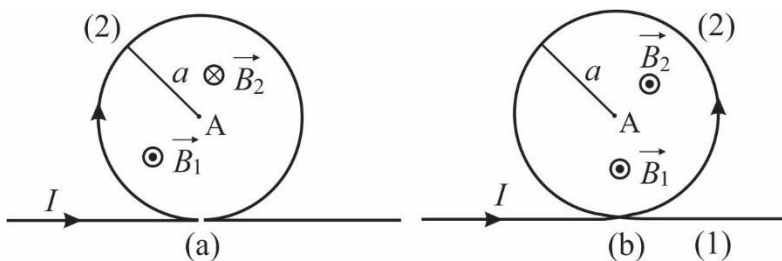
$$B_A = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right),$$

$$B_A = 0.8464 \text{ мТ.}$$

10. Два неограничено дуга проводника кроз које протиче струја I савијени су као на слици 10. Одредити који од ова два начина савијања проводника је бољи у погледу добијања што веће индукције у центру кружнице и колико је пута тај начин савијања бољи у односу на други. Систем се налази у вакууму.



Слика 10



Слика 10.1

1. случај (а)

$$B_a = B_2 - B_1,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha = \frac{\mu_0 I}{2a}, \quad \alpha = 2\pi$$

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\pi - 1).$$

2. случај (b)

$$B_b = B_2 + B_1,$$

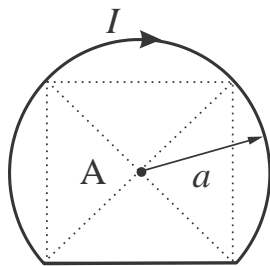
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \frac{\alpha}{2},$$

$$B_b = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\pi + 1).$$

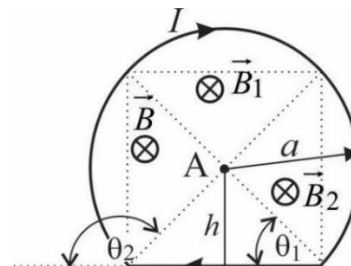
Интензитет вектора магнетне индукције је већи у случају (b), јер је

$$\frac{B_b}{B_a} = \frac{\pi + 1}{\pi - 1} = 1.933.$$

11. Проводник, савијен као на слици 11, образује у равни струјну контуру кроз коју протиче једносмерна струја I . Одредити вектор магнетне индукције у тачки А ако је $I = 100$ А, $a = 1$ м.



Слика 11



Слика 11.1

Контуру је могуће поделити на два дела: кружни део (ствара индукцију B_1 у тачки А) и прав део (ствара индукцију B_2 у тачки А).

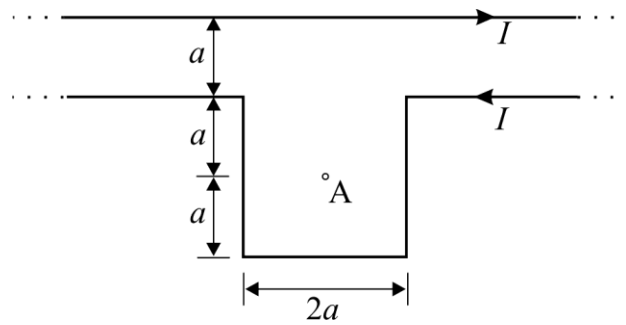
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{3\pi}{2} = \frac{3\mu_0 I}{8a},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

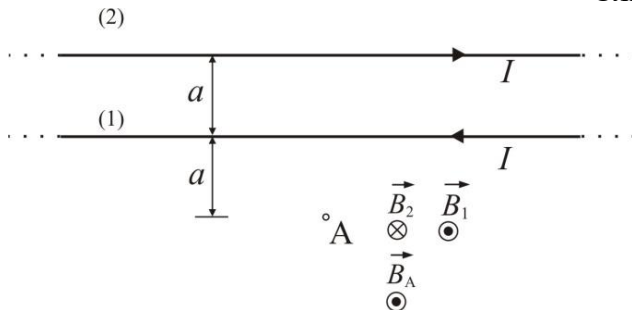
$$B = B_1 + B_2 = \frac{3\mu_0 I}{8a} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 + \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$B = 67.124 \text{ } \mu\text{T}.$$

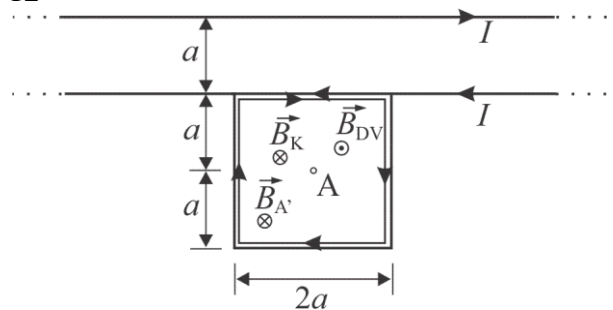
12. Један проводник двожичног вода савијен је као на слици 12. Одредити колико пута је интензитет вектора магнетне индукције у тачки А већи у односу на случај када изобличење проводника не постоји. Који је правац и смер вектора магнетне индукције у оба случаја? Сматрати да се вод налази у вакууму.



Слика 12



Слика 12.1



Слика 12.2

Нека је B_A интензитет вектора магнетне индукције у тачки А када један од проводника није савијен и нека је он оријентисан „ка нама“ (слика 12.1). Тада је:

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

$$B_A = B_1 - B_2,$$

$$B_1 = \mu_0 \frac{I}{2\pi a}, \quad B_2 = \mu_0 \frac{I}{2\pi 2a} = \mu_0 \frac{I}{4\pi a}, \quad \text{па је } B_A = \mu_0 \frac{I}{4\pi a}.$$

Када је један од проводника савијен, резултујући вектор магнетне индукције у тачки А ($\vec{B}_{A'}$) је интензитета $B_{A'}$ и оријентисан је „у свеску“ (слика 12.2).

Индукцију од савијеног проводника најлакше је одредити суперпозицијом, тако што се савијени проводник „допуни“ до правог проводника, а квадратна контура којој недостаје једна страница допуни делом који је на истом месту и као „допуна“ неограниченог, правог проводника (B_K). При томе треба имати у виду да су струје супротних смерова у „допунама“ па је укупна њихова индукција нула.

$$\vec{B}_{A'} = \vec{B}_{DV} + \vec{B}_K,$$

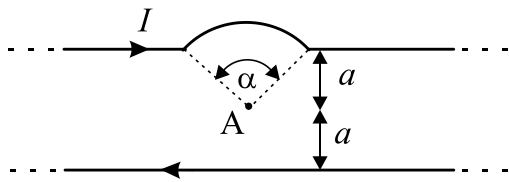
$$B_{A'} = B_K - B_{DV},$$

$$B_{DV} = B_A = \mu_0 \frac{I}{4\pi a},$$

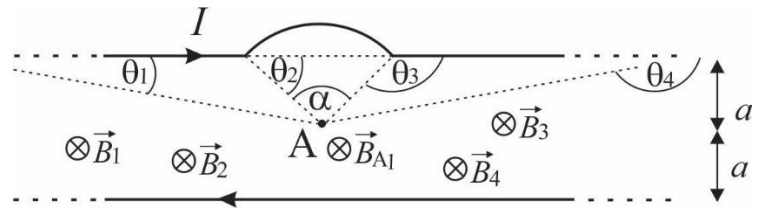
$$B_K = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 4\sqrt{2}, \quad \text{па је } B_{A'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (4\sqrt{2} - 1).$$

Тражени однос је $\frac{B_{A'}}{B_A} = 4\sqrt{2} - 1$.

13. Један проводник двожичног вода савијен је као на слици 13. Одредити колико пута се интензитет вектора магнетног поља у тачки А промени у односу на случај када изобличење на проводнику вода не постоји. Сматрати да се вод налази у ваздуху. Познато је: $I=100\text{A}$, $\alpha = \pi/2$, $a = 1\text{m}$.



Слика 13



Слика 13.1

1. случај – изобличење постоји

$$B_{A1} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

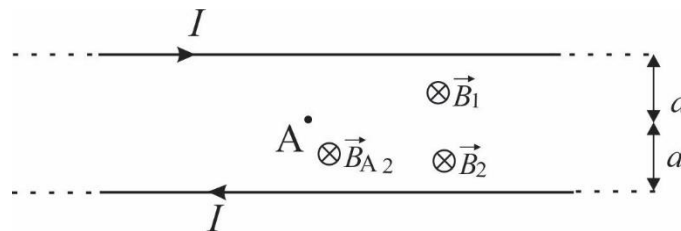
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \alpha = \frac{\mu_0 I}{8a\sqrt{2}} / R = a\sqrt{2}, \alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_3 - \cos \theta_4) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

$$B_{A1} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{\mu_0 I}{4a} \frac{2\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + \pi}{2\sqrt{2}\pi}.$$

2. случај – изобличење не постоји (слика 13.2)



Слика 13.2

$$B_{A2} = B_1 + B_2,$$

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, B_{A2} = \frac{\mu_0 I}{\pi a}.$$

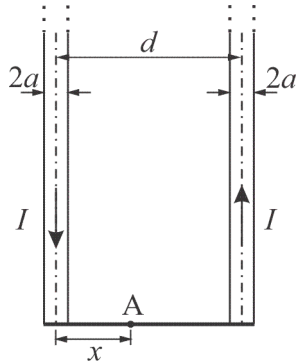
Однос магнетног поља када постоји изобличење једног од проводника и када тог изобличења нема је:

$$\frac{H_{A1}}{H_{A2}} = \frac{B_{A1}/\mu_0}{B_{A2}/\mu_0} = \frac{B_{A1}}{B_{A2}} = \frac{2\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + \pi}{8\sqrt{2}} = 0.924.$$

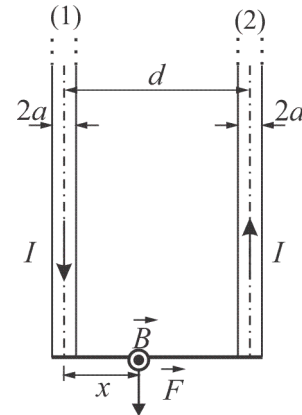
Треба напоменути да смо и овде могли да применимо принцип суперпозиције, слично као и у претходном примеру.

14. Један крај неограничено дугог, ваздушног двожишног вода, полупречника попречног пресека проводника a и растојања између оса проводника d , ($d \gg a$), краткоспојен је танким жичаним проводником, као на слици 14. Одредити:

- а) Интензитет вектора магнетне индукције у тачки А, на растојању x од осе првог проводника;
 б) Интензитет магнетне силе на проводник којим је краткоспојен двожишни вод.



Слика 14



Слика 14.1

а) Индукцију на краткоспојнику је могуће одредити на следећи начин:

$$B = B_1 + B_2,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(d-x)} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(d-x)} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(d-x)},$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right).$$

б) Сила на струјни елемент проводника којим је краткоспојен двожишни вод је:

$$d\vec{F} = I_3 d\vec{l} \times \vec{B},$$

$$dF = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx,$$

а за укупну силу на краткоспојник се добија:

$$F = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} 2 \ln \frac{d-a}{a} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Како је $a \ll d$, претходни израз се може апроксимирати, па је $F \approx \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d}{a}$.