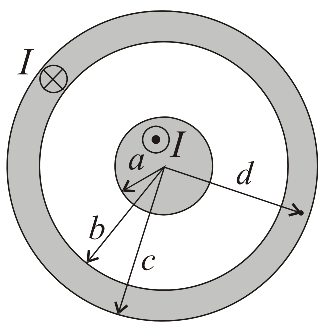
1. Полупречник унутрашњег проводника коаксијалног кабла је a. Спољашњи проводник је коначне дебљине унутрашњег полупречника b и спољашњег c. Проводници кабла су начињени од бакра ($\mu \approx \mu_0$). Кроз кабл протиче стална једносмерна струја I (слика 1).

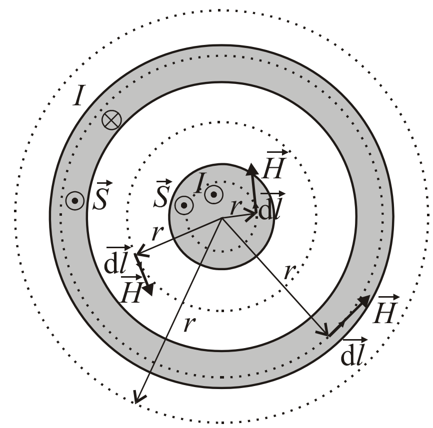
а) Одредити јачину магнетног поља у функцији растојања r од осе кабла и нацртати дијаграм $H(r)$.

б) Израчунати јачину струје I, ако је јачина магнетног поља на растојању d од осе кабла $H_d = 78.8\ \mathrm{A/m}$.

Познато је: $a = 1\mathrm{cm}$, $b = 5\mathrm{cm}$, $c = 6\mathrm{cm}$ и $d = 5.5\mathrm{cm}$.



Слика 1



Слика 1.1

а) Могуће је применити генералисани Амперов закон, а због постојања аксијалне симетрије проблем се додатно поједностављује:

$$\oint_c \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \sum I$$

Интеграција магнетног поља изводи се по затвореној кружној путањи c. Та контура је кружница полупречника r, која се поставља у све четири области од интереса (слика 1.1). Десна страна једначине је флукс густине тоталне струје (у оквиру овог курса само кондукционе струје) кроз површину произвољног облика (S), која се „ослања“ на ту контуру. Разлика је у алгебарској суми струја које продиру ту површину.

Магнетно поље у свим областима се добија на следећи начин:

- Вектори $\vec{H}$ и $\mathrm{d}\vec{l}$ су колинеарни па је њихов скаларни производ једнак производу њихових интензитета: $\oint_c \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_c H\,\mathrm{d}l$;
- интензитет вектора магнетног поља је исти у свим тачкама контуре, па се као стална вредност може „извући“ испред интеграла: $\oint_c H\,\mathrm{d}l = H\oint_c \mathrm{d}l = H\,2r\pi$.
- Изабрана кружна контура „лежи“ у равни па је најлакше на ту контуру „ослонити“ равну површину (у овом случају круг). Вектор површине те површи је нормалан на њу и правац се поклапа са правцем вектора густине струје (смер зависи од избора оријентације контуре c). Зато је десну страну могуће написати у облику: $\int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S J\,\mathrm{d}S$.

  Ако је струја исте густине у свакој тачки „ослоњене“ површине, тада се може писати: $\int_S J\,\mathrm{d}S = J\int_S \mathrm{d}S = JS$. У супротном, интензитет густине струје остаје под интегралом, а диференцијал површине је $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$.

За магнетно поље у појединим областима добија се:

I) $\underline{0 \le r \le a}$

$\int\limits_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_S J_1\,\mathrm{d}S = J_1 r^2$, при чему је $J_1 = \dfrac{I}{a^2\pi}$.

Изједначавањем леве и десне стране генералисаног Амперовог закона добија се $H = \dfrac{I}{2a^2\pi} r$.

II) $\underline{a \le r \le b}$

$\oint\limits_c \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint\limits_c H\,\mathrm{d}l = H 2r\pi$. Сума струја обухваћених контуром c у овој области је $\sum I = I$, па је из генералисаног Амперовог закона $H = \dfrac{I}{2\pi r}$.

III) $\underline{b \le r \le c}$

$\oint\limits_c \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint\limits_c H\,\mathrm{d}l = H 2r\pi$, док је сума струја обухваћених контуром c:

$$\sum I = I + \int\limits_S \vec{J}_2\,\mathrm{d}\vec{S} = I + \int\limits_S J_2\,\mathrm{d}S \cos\pi = I - \int\limits_S J_2\,\mathrm{d}S = I - J_2(r^2 - b^2)\pi = I - \frac{I}{(c^2 - b^2)\pi}(r^2 - b^2)\pi = I\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

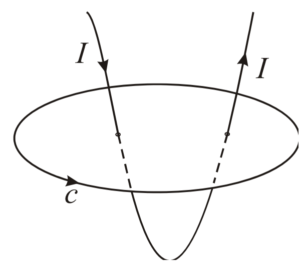
Изједначавањем леве и десне стране генералисаног Амперовог закона добија се:

$$H = \frac{I}{2\pi r}\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}.$$

IV) $\underline{r \ge c}$

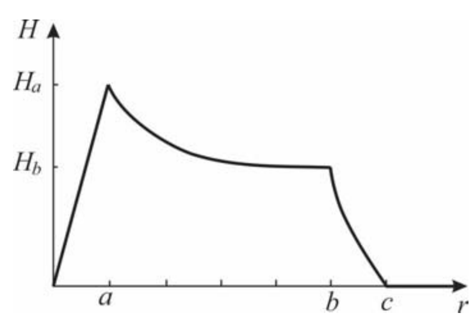
Сума струја обухваћених контуром c је $\sum I = 0 \Rightarrow H = 0$.

У општем случају, не мора магнетно поље да буде једнако нули ако је алгебарска сума струја које продиру површину контуре једнака нули (слика 1.2). Међутим, у овом примеру нема магнетног поља ван кабла, тј. не постоје линије магнетног поља у тој области.
До истог закључка се долази и на основу анализе подинтегралне функције, која има подједнак број „супротних“ сингуларитета.



Слика 1.2

Зависност јачине магнетног поља од растојања приказана је на слици 1.3, где је $H_a = \dfrac{I}{2\pi a}$ и $H_b = \dfrac{I}{2\pi b}$.



Слика 1.3

б) Растојање d од осе кабла, у коме је јачина магнетног поља позната, налази се у области $b \le r \le c$. Стављајући да је $r = d$ добија се једначина:

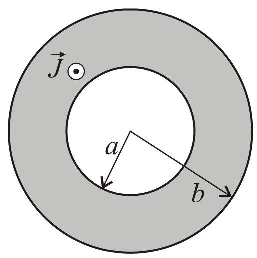
$H_d = \dfrac{I}{2\pi d}\dfrac{c^2 - d^2}{c^2 - b^2}$, одакле се за струју добија: $I = 2\pi d H_d \dfrac{c^2 - b^2}{c^2 - d^2}$.

Заменом бројних вредности струја је $I \approx 52\,\mathrm{A}$.

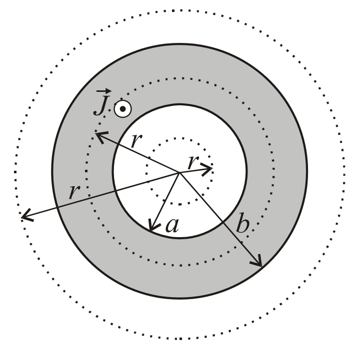
2. Кроз неограничено дуг, прав проводник у облику цеви, полупречника унутрашњег зида a и спољашњег $b = 2a$ (слика 2), протиче једносмерна струја сталне густине J. Проводник је начињен од бакра ($\mu \approx \mu_0$) и налази се у вакууму.

а) Одредити промену вектора магнетне индукције у функцији растојања од осе проводника.

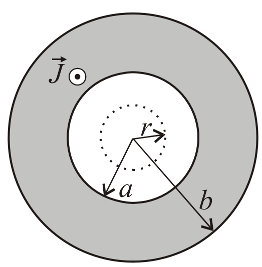
б) Одредити интензитет вектора магнетне индукције на растојањима $r = \dfrac{3a}{2}$ и $r = 5a$ од осе проводника.



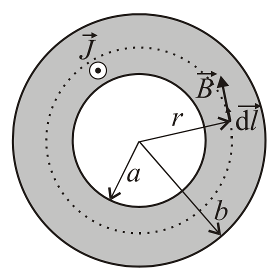
Слика 2



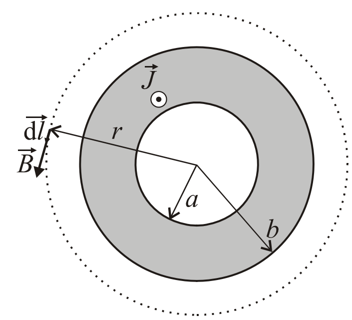
Слика 2.1



Слика 2.2



Слика 2.3



Слика 2.4

а) У овом случају постоје три области (слика 2.1) у којима треба применити Амперов закон:

$$\oint_c \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \sum I .$$

I) $\underline{0 \le r \le a}$ (слика 2.2)

Десна страна једначине једнака је нули јер осим што не постоје линије поља, не постоји ни струја која продире површину ослоњену на контуру полупречника r. Зато нема магнетног поља и магнетне индукције у тој области.

II) $\underline{a \le r \le b}$ (слика 2.3)

$$\oint_c \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_c B\,\mathrm{d}l = B2r\pi, \quad \int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S J\,\mathrm{d}S = J(r^2 - a^2)\pi .$$

Изједначавањем леве и десне стране Амперовог закона добија се $B = \mu_0 \dfrac{J}{2r}(r^2 - a^2)$.

III) $\underline{r \ge b}$ (слика 2.4)

$$\oint_c \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_c B\,\mathrm{d}l = B2r\pi, \quad \sum I = J(b^2 - a^2)\pi .$$

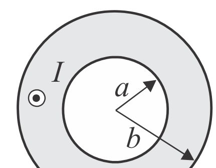
Изједначавањем леве и десне стране Амперовог закона добија се: $B = \mu_0 \dfrac{J}{2r}(b^2 - a^2)$.

б) За $r = \dfrac{3a}{2}$ ($a < r < b$) добија се $B = \mu_0 J \dfrac{5a}{12}$, док је за $r = 5a$ ($r > b$), $B = \mu_0 J \dfrac{3a}{10}$.

3. Кроз неограничено дуг, прав проводник у облику цеви, полупречника унутрашњег зида a и спољашњег b (слика 3), протиче стална струја јачине I.

Проводник је начињен од бакра ($\mu \approx \mu_0$) и налази се у вакууму. Одредити интензитет вектора магнетне индукције на растојањима $r_1 = 6\,\text{cm}$ и $r_2 = 12\,\text{cm}$ од осе проводника.

Познато је: $a = 3\,\text{cm}, b = 3a = 9\,\text{cm}$, $I = 360\,\text{A}$.



Слика 3

Ако се у претходном задатку густина струје замени са $J = \dfrac{I}{(b^2 - a^2)\pi}$, могу се искористити сви изрази добијени у том задатку, тако да је $B = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r}\dfrac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$, у области где постоји струја ($a < r < b$), а $B = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r}$, ван проводника (за $r > b$).

За $r_1 = 6\,\text{cm}$ ($a < r < b$), добија се $B = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r_1}\dfrac{r_1^2 - a^2}{b^2 - a^2} = 0.45\,\text{mT}$.

Када је $r_2 = 12\,\text{cm}$ ($r > b$), магнетна индукција је $B = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r_2} = 0.6\,\text{mT}$.

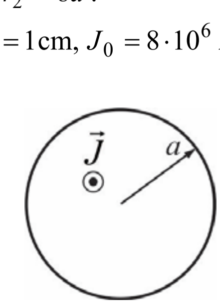
4. Кроз неограничено дуг, прав проводник (слика 4) кружног попречног пресека, полупречника a, протиче струја чија се густина у попречном пресеку мења у функцији растојања од осе проводника по закону $J = J_0 \dfrac{r^2}{a^2}$.

Проводник је начињен од бакра ($\mu \approx \mu_0$) и налази се у ваздуху.

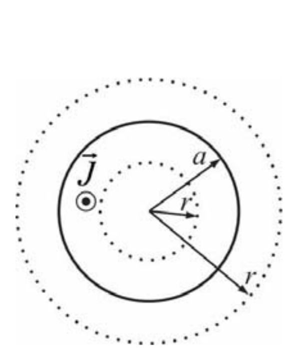
а) Одредити промену интензитета вектора магнетне индукције у функцији растојања од осе проводника.

б) Одредити растојање r_1, ($r_1 < a$), од осе проводника на коме је магнетна индукција иста као на растојању $r_2 = 8a$.

Познато је: $a = 1\text{cm}, J_0 = 8 \cdot 10^6\ \text{A/m}^2$.



Слика 4



Слика 4.1

а) Амперов закон треба применити у две области (слика 4.1): у проводнику кроз који протиче струја и ван њега.

У оба случаја, лева страна једнакости $\oint_c \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S}$ је $\oint_c \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_c B\,\mathrm{d}l = B\,2r\pi$.

I) <u>$0 \le r \le a$</u>

$$\int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S J\,\mathrm{d}S = \int_0^r J_0 \frac{r^2}{a^2}\, 2r\pi\,\mathrm{d}r = J_0 \frac{\pi r^4}{2a^2}.$$

Изједначавањем леве и десне стране Амперовог закона добија се

$$B\,2r\pi = \frac{\mu_0 J_0 \pi r^4}{2a^2}, \text{ одакле је } B = \frac{\mu_0 J_0}{4a^2} r^3.$$

II) <u>$r \ge a$</u>

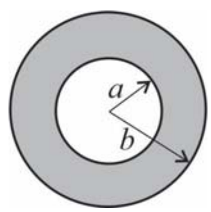
$$\int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S J\,\mathrm{d}S = \int_0^a J_0 \frac{r^2}{a^2}\, 2r\pi\,\mathrm{d}r = \frac{J_0 \pi a^2}{2}.$$

Из Амперовог закона следи $B\,2r\pi = \dfrac{\mu_0 J_0 \pi a^2}{2}$, па је $B = \dfrac{\mu_0 J_0 a^2}{4r}$.

б) Из услова да је индукција на растојањима r_1 $(r_1 < a)$ и r_2 $(r_2 > a)$ иста, $B(r_1) = B(r_2)$, тј.

$\dfrac{\mu_0 J_0}{4a^2} r_1^3 = \dfrac{\mu_0 J_0 a^2}{4} \dfrac{1}{8a}$, добија се $r_1 = \dfrac{a}{2} = 0.5\,\mathrm{cm}$.

5. Неограничено дуг, прав проводник у облику цеви, полупречника унутрашњег зида a и спољашњег b (слика 5), начињен је од алуминијума. Одредити подужну енергију магнетног поља у проводнику дужине l.



Слика 5

Интензитет вектора јачине магнетног поља у функцији растојања од осе система одређује се из генералисаног Амперовог закона:

$$\oint_c \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S}.$$

У области $a \le r \le b$:

$H 2\pi r = \dfrac{I}{(b^2 - a^2)\pi}(r^2 - a^2)\pi$, па је $H = \dfrac{I}{2\pi r(b^2 - a^2)}(r^2 - a^2)$.

За алуминијум је $\mu \approx \mu_0$, па је запреминска густина енергије $w_m = \dfrac{1}{2}\mu_0 H^2$. Заменом израза за јачину магнетног поља добија се $w_m = \dfrac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \dfrac{(r^2 - a^2)^2}{r^2 (b^2 - a^2)^2}$.

Енергија локализована у простору $a \le r \le b$ је

$$W_m = \int_V w_m \,\mathrm{d}V = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2(b^2 - a^2)^2} 2\pi r l \,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\left(\frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2}\ln\frac{b}{a} - \frac{3a^2 - b^2}{4(b^2 - a^2)}\right),$$

а по јединици дужине

$$W'_m = \frac{W_m}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2}\ln\frac{b}{a} - \frac{3a^2 - b^2}{4(b^2 - a^2)}\right) = \frac{1}{2} L'_\mathrm{u} I^2$$, где је

$$L'_\mathrm{u} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2}\ln\frac{b}{a} - \frac{3a^2 - b^2}{4(b^2 - a^2)}\right)$$

подужни унутрашњи коефицијент сопствене индуктивности (самоиндукције).

Потражимо магнетну енергију локализовану и ван проводника. За $r \geq b$, јачина магнетног поља је $H = \dfrac{I}{2\pi r}$, па је запреминска густина енергије

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I^2}{(2\pi r)^2},$$

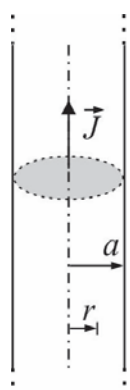
а магнетна енергија у тој области $W_m = \displaystyle\int_V w_m \,\mathrm{d}V = \int_b^R \frac{\mu_0}{2}\frac{I^2}{(2\pi r)^2} 2\pi r l \,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R}{b}$.

У случају када $R \to \infty$ тада и $W_m \to \infty$ што нема физичког смисла, јер само теоријски проводник може бити неограничен.

6. Дат је неограничени праволинијски проводник кружног попречног пресека полупречника $a = 1\,\mathrm{cm}$ (слика 6). Ако је у проводнику успостављена струја чија се густина, у функцији растојања од осе проводника, мења по закону $J = J_0\left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$, где је $J_0 = 2\,\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$, одредити:

а) Јачину магнетног поља на растојању $r = 0.5\,\mathrm{cm}$ од осе проводника,

б) Подужну енергију локализовану у проводнику.



Слика 6

а) $H(r = 0.5\,\mathrm{cm}) = 4.375 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$.

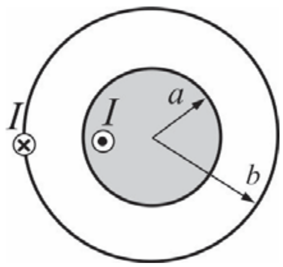
б) $W' = \dfrac{W}{l} = \dfrac{11}{96}\mu_0 \pi a^4$.

7. Кроз коаксијални вод са ваздушним диелектриком (слика 7), полупречника унутрашњег проводника a и полупречника спољашњег проводника b (спољашњи проводник је занемарљиве дебљине), протиче једносмерна струја I. Струја је константне густине у попречном пресеку унутрашњег проводника. Проводници су начињени од материјала чија је $\mu \approx \mu_0$. Одредити:

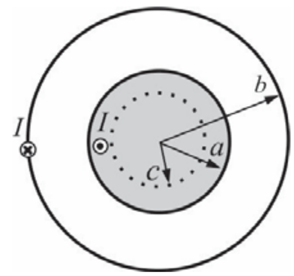
а) Зависност интензитета вектора магнетне индукције у функцији растојања од осе система,

б) Полупречник цилиндричне површине c која дели целокупан простор на два дела у којима су подужне магнетне енергије једнаке.

Нумерички подаци: $a = 50\,\mathrm{mm}$, $b = 54.1\,\mathrm{mm}$ $I = 2.75\,\mathrm{A}$.



Слика 7



Слика 7.1

а) Интензитет вектора магнетне индукције коаксијалног вода у функцији растојања од осе система одређује се применом Амперовог закона:

$$\oint_c \vec{B}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 \int_S \vec{J}\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}.$$

Лева страна овог закона има облик $\oint_c \vec{B}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint_c B\,\mathrm{d}l = B\,2r\pi$.

I) У области $\underline{r \le a}$ важи $\int_S \vec{J}\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_S J\,\mathrm{d}S = Jr^2\pi = \dfrac{I}{a^2\pi} r^2\pi$.

Изједначавањем леве и десне стране израза добија се $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$.

II) $\underline{a \le r \le b}$

С обзиром да је у овој области $\int_S \vec{J}\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = I$, заменом у Амперов закон, добија се $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

III) $\underline{r \ge b}$

У овој области је $\sum I = I - I = 0$, па је магнетна индукција једнака нули, $B = 0$.

б) Запреминска густина енергије се одређује из израза $w = \dfrac{1}{2} BH = \dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu_0}$.

Енергија локализована у простору_$0 \le r \le a$ је

$$W_{\mathrm{u}} = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_0^a \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,\mathrm{d}V = \int_0^a \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,2\pi r l\,\mathrm{d}r = \int_0^a \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 I^2 r^2}{4\pi^2 a^4}\,2\pi r l\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi a^4}\frac{r^4}{4}\bigg|_0^a = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}.$$

Енергија локализована у простору $a \le r \le b$:

$$W_{\mathrm{s}} = \int_V w \,\mathrm{d}V = \int_a^b \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,\mathrm{d}V = \int_a^b \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,2\pi r l\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2}\,2\pi r l\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln r\Big|_a^b = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

С обзиром да је однос $\dfrac{W_{\mathrm{u}}}{W_{\mathrm{s}}} = \dfrac{\dfrac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}}{\dfrac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\dfrac{b}{a}} = \dfrac{\dfrac{1}{4}}{\ln\dfrac{b}{a}} = \dfrac{0.25}{0.078} \approx 3.2 > 1$,

то је $W_{\mathrm{u}} > W_{\mathrm{s}}$, односно већа је количина енергије локализована у простору $0 < r < a$ него у простору $a < r < b$, па се закључује да се полупречник c налази у простору $0 < r < a$ (слика 7.1).

Из услова задатка да цилиндрична површина полупречника c подели простор на два дела са једнаким енергијама добија се:

$$W_{\mathrm{u}}(0 < r < c) = W_{\mathrm{u}}(c < r < a) + W_{\mathrm{s}}(a < r < b).$$

Заменом одговарајућих израза, добија се:

$$\int_0^c \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,2\pi r l\,\mathrm{d}r = \int_c^a \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,2\pi r l\,\mathrm{d}r + \int_a^b \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,2\pi r l\,\mathrm{d}r,$$

$$\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi a^4}\frac{r^4}{4}\Big|_0^c = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi a^4}\frac{r^4}{4}\Big|_c^a + \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln r\Big|_a^b,$$

$$\frac{1}{a^4}\frac{c^4}{4} = \frac{1}{a^4}\frac{a^4 - c^4}{4} + \ln\frac{b}{a},$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^4 = \frac{a^4 - c^4}{a^4} + 4\ln\frac{b}{a},$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^4 = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^4 + 4\ln\frac{b}{a},$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^4 = \frac{1 + 4\ln\dfrac{b}{a}}{2}, \text{ одакле је: } c = a\sqrt[4]{\frac{1 + 4\ln\dfrac{b}{a}}{2}} = 45\,\mathrm{mm}.$$