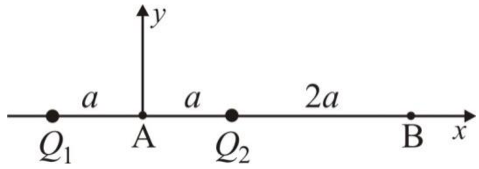
Кулонов закон

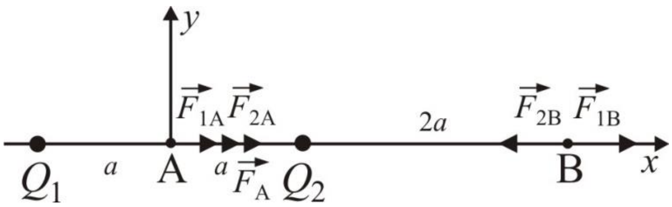
1. Два тачкаста наелектрисања $Q_1 = 400\,\mathrm{pC}$ и $Q_2 = -100\,\mathrm{pC}$ налазе се у хомогеном диелектрику, релативне диелектричне константе $\varepsilon_r = 2$, на међусобном растојању $2a$ ($a = 1\mathrm{cm}$), као на слици 1. Одредити силу на наелектрисање $Q_3 = 100\mathrm{pC}$ када се оно нађе:

а) у тачки A(0,0);
б) у тачки B($3a$,0).



Слика 1

На наелектрисање Q_3 делује резултујућа сила $\vec{F}_A$, која је последица дејства одбојне Кулонова силе интеракције $\vec{F}_{1A}$ између оптерећења Q_1 и Q_3, као и привлачне силе $\vec{F}_{2A}$ између наелектрисања Q_2 и Q_3 (Сл. 1.1):



Слика 1.1

$$\vec{F}_{1A} = F_{1A}\hat{x} = \frac{k_0}{\varepsilon_r}\frac{|Q_1||Q_3|}{a^2}\hat{x}, \qquad \vec{F}_{2A} = F_{2A}\hat{x} = \frac{k_0}{\varepsilon_r}\frac{|Q_2||Q_3|}{a^2}\hat{x}.$$

Ако је средина крута и линеарна у електричном смислу, резултујућа сила се добија као векторски збир:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{1A} + \vec{F}_{2A} = \frac{k_0|Q_3|}{\varepsilon_r a^2}\left(|Q_1| + |Q_2|\right)\hat{x},$$

$$\vec{F}_A = 2.25\cdot 10^{-6}\,\hat{x}\ [\mathrm{N}].$$

Вектори $\vec{F}_{1A}$ и $\vec{F}_{2A}$ су колинеарни, тако да није било потребно разлагати их на компоненте.

На сличан начин је могуће одредити силу на наелектрисање Q_3 када се оно нађе у тачки B.

Наелектрисања Q_1 и Q_2 делују на наелектрисање Q_3 силама $\vec{F}_{1B}$ и $\vec{F}_{2B}$, респективно:

$$\vec{F}_{1B} = F_{1B}\hat{x} = \frac{k_0}{\varepsilon_r}\frac{|Q_1||Q_3|}{16a^2}\hat{x}, \quad \vec{F}_{2B} = -F_{2B}\hat{x} = -\frac{k_0}{\varepsilon_r}\frac{|Q_2||Q_3|}{4a^2}\hat{x},$$

а резултујућа сила је

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{1B} + \vec{F}_{2B} = \frac{k_0|Q_3|}{16\varepsilon_r a^2}\left(|Q_1| - 4|Q_2|\right)\hat{x},$$

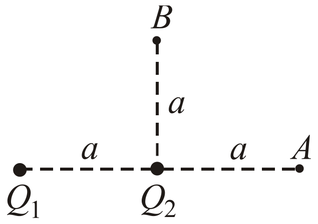
тј. $F_B = 0\ \mathrm{N}$.

Укупна Кулонова сила на наелектрисање Q_3 је нула.

Могуће је закључити да су силе на то наелектрисање, које потичу од наелектрисања Q_1 и Q_2, истог интензитета и правца а супротног смера, што доводи до тога да се оне пониште.

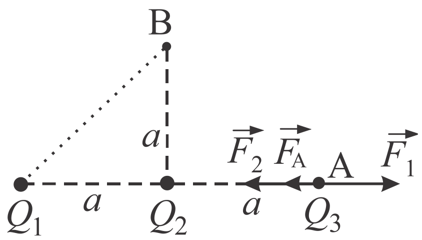
2. Два тачкаста наелектрисања, $Q_1 = 2\sqrt{2}Q$ и $Q_2 = -Q$, налазе се у вакууму и распоређена су као на слици 2. Одредити силу на наелектрисање $Q_3 = Q$ када се оно налази:

а) у тачки А(a,0);
б) у тачки $B(0,\ a)$.
Бројни подаци: $Q = 6\text{nC}$, $a = 1\text{m}$.

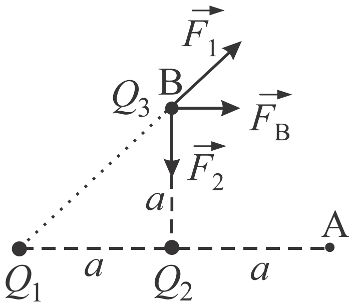


Слика 2

а) Када се наелектрисање Q_3 нађе у тачки А (Сл. 2.1), на њега делују Кулоновим силама оптерећења Q_1 и Q_2:



Слика 2.1



Слика 2.2

$$F_1 = k_0 \frac{Q_1 Q_3}{(2a)^2} = k_0 \frac{2\sqrt{2}Q^2}{4a^2}, \quad F_2 = k_0 \frac{|Q_2|Q_3}{a^2} = k_0 \frac{Q^2}{a^2}.$$

Сила на наелектрисање Q_3 је:

$$\vec{F}_\text{A} = (F_1 - F_2)\hat{x} = k_0 \frac{Q^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\hat{x} = -94.932\,\hat{x}\ [\text{nN}].$$

б) Када се наелектрисање Q_3 нађе у тачки В (Сл. 2.2), на њега делују оптерећења Q_1 и Q_2:

$$F_1 = k_0 \frac{Q_1 Q_3}{(a\sqrt{2})^2} = k_0 \frac{\sqrt{2}Q^2}{a^2}, \quad F_2 = k_0 \frac{|Q_2|Q_3}{a^2} = k_0 \frac{Q^2}{a^2}.$$

Вектори $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ нису колинеарни. Да би их сабрали потребно је сваки од њих разложити на компоненте по x и y оси. За $\vec{F}_1$ се добија:

$$F_{1x} = F_{1y} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_1 = k_0 \frac{Q^2}{a^2},$$

док $\vec{F}_2$ има само y компоненту:

$$F_{2x} = 0, \qquad F_{2y} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_1 = -k_0 \frac{Q^2}{a^2}.$$

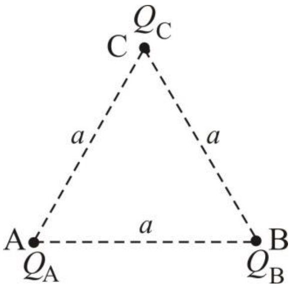
Укупна сила на наелектрисање Q_3 је:

$$\vec{F}_\text{B} = F_{1x}\hat{x} + (F_{1y} + F_2)\hat{y} = k_0 \frac{Q^2}{a^2}\hat{x} + \left(k_0 \frac{Q^2}{a^2} - k_0 \frac{Q^2}{a^2}\right)\hat{y} = 0.324\hat{x}\ [\mu\text{N}].$$

Могуће је уочити да резултујућа сила има само x компоненту, док се y компоненте поништавају.

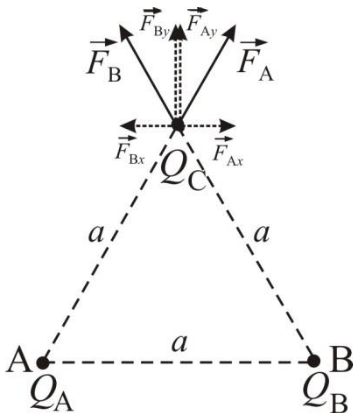
3. Тачкаста наелектрисања Q_A , Q_B и Q_C налазе се у теменима једнакостраничног троугла странице a као на слици 3. Одредити вектор резултујуће силе на наелектрисање Q_C .

Познато је: $Q_\mathrm{A} = Q_\mathrm{B} = Q_\mathrm{C} = 10\mathrm{pC}$, $a = 1\mathrm{m}$.



Слика 3

На наелектрисање Q_C делују истовремено одбојном силом и наелектрисање Q_A и наелектрисање Q_B (Сл. 3.1).



Слика 3.1

Интензитети тих сила се рачунају као:

$$F_\mathrm{A} = k_0 \frac{Q_\mathrm{A} Q_\mathrm{C}}{a^2}; \qquad F_\mathrm{B} = k_0 \frac{Q_\mathrm{B} Q_\mathrm{C}}{a^2}.$$

Да би се одредио резултујући вектор Кулонове силе на наелектрисање Q_C неопходно је ова два вектора разложити на компоненте, затим израчунати укупну x и y компоненту вектора $\vec{F}_\mathrm{C}$, а потом одредити интензитет резултујућег вектора и угао који он заклапа са позитивним смером x осе.

$$F_{\mathrm{A}x} = F_\mathrm{A} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{F_\mathrm{A}}{2}, \qquad F_{\mathrm{A}y} = F_\mathrm{A} \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} F_\mathrm{A}}{2},$$

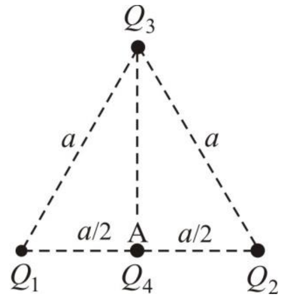
$$F_{\mathrm{B}x} = -F_\mathrm{B} \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{F_\mathrm{B}}{2}, \qquad F_{\mathrm{B}y} = F_\mathrm{B} \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} F_\mathrm{B}}{2},$$

$$\vec{F}_\mathrm{C} = \vec{F}_\mathrm{A} + \vec{F}_\mathrm{B} = \left(F_{\mathrm{A}x} + F_{\mathrm{B}x}\right)\hat{x} + \left(F_{\mathrm{A}y} + F_{\mathrm{B}y}\right)\hat{y},$$

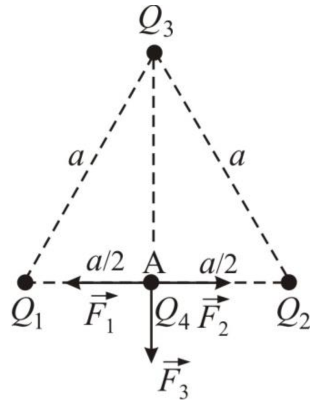
$$\vec{F}_\mathrm{C} = \frac{\sqrt{3} k_0 Q_\mathrm{C}}{2a^2}\left(Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B}\right)\hat{y} = 0.9\sqrt{3}\hat{y}\ [\mathrm{pN}] = 1.559\hat{y}\ [\mathrm{pN}].$$

Резултујући вектор има само y компоненту, што значи да заклапа угао од $\frac{\pi}{2}$ rad са x осом.

4. Три тачкаста наелектрисања $Q_1 = -4\,\text{nC}$, $Q_2 = -7\,\text{nC}$ и $Q_3 = 8\,\text{nC}$ налазе се у теменима једнакостраничног троугла (слика 4) странице $a = 10\text{cm}$ у вакууму. Одредити силу на наелектрисање $Q_4 = 1\text{nC}$ које се налази у тачки А, на половини дужи која спаја наелектрисања Q_1 и Q_2.



Слика 4



Слика 4.1

Поступак решавања овог задатка је потпуно исти као и у претходном примеру:

$$F_1 = k_0 \frac{|Q_1|Q_4}{a^2/4},\ F_2 = k_0 \frac{|Q_2|Q_4}{a^2/4},\ F_3 = k_0 \frac{Q_3 Q_4}{3a^2/4},$$

$$\vec{F}_\text{A} = (F_2 - F_1)\hat{x} - F_3 \hat{y},$$

$$\vec{F}_\text{A} = \left(k_0 \frac{4|Q_2|Q_4}{a^2} - k_0 \frac{4|Q_1|Q_4}{a^2} \right)\hat{x} - k_0 \frac{4Q_3Q_4}{3a^2}\hat{y}.$$

Након што се замене бројне вредности добија се:

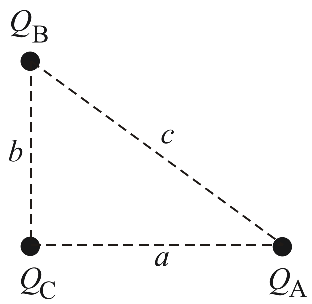
$$\vec{F}_\text{A} = (10.8\,\hat{x} - 9.6\,\hat{y})\,[\mu\text{N}],$$

чији је интензитет

$$\left|\vec{F}_\text{A}\right| = 14.45\ \mu\text{N}.$$

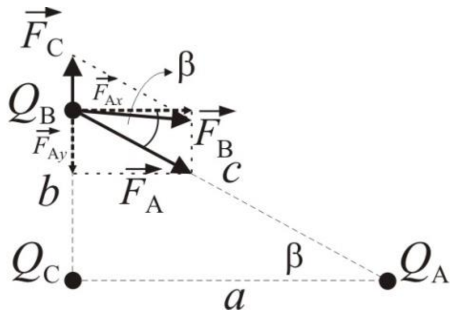
5. Три тачкаста наелектрисања Q_A, Q_B и Q_C налазе се у теменима троугла као на слици 5. Систем се налази у вакууму. Израчунати силу на наелектрисања Q_B и Q_C.

Познато је: $Q_\text{A} = -5\text{nC}$, $Q_\text{B} = 9\text{nC}$, $Q_\text{C} = 1\text{nC}$, $a = 4\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$, $c = 5\text{cm}$.



Слика 5

*****Одређивање силе на наелектрисање које се налази у тачки В (Сл.5.1):**



Слика 5.1

Силе које делују на наелектрисање Q_B су интензитета

$$F_A = k_0 \frac{|Q_A| Q_B}{c^2} = 162\ \mu N,$$

и

$$F_C = k_0 \frac{|Q_B| Q_C}{b^2} = 90\ \mu N.$$

Њихове компоненте су:

$$F_{Ax} = F_A \cos\beta = F_A \frac{a}{c} = \frac{4}{5} F_A = 129.6\,\mu N,$$

$$F_{Ay} = -F_A \sin\beta = -F_A \frac{b}{c} = -\frac{3}{5} F_A = -97.2\ \mu N,$$

$$F_{Cx} = 0\ N,$$

$$F_{Cy} = F_C = 90\ \mu N.$$

Вектор силе на наелектрисање Q_B је:

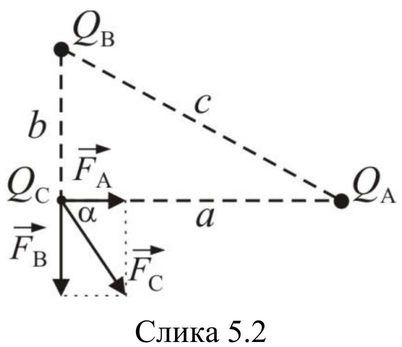
$$\vec{F}_B = \vec{F}_A + \vec{F}_C = F_{Ax}\hat{x} + \left(F_C + F_{Ay}\right)\hat{y} = 129.6\hat{x} - 7.2\hat{y}\ [\mu N],$$

чији је интензитет и угао који заклапа са апсцисном осом:

$$F_B = \sqrt{F_A^2 + F_C^2} = 129.799\ \mu N, \qquad \varphi = \arctan\frac{F_{By}}{F_{Bx}} = -3.18^\circ.$$

***Одређивање силе на наелектрисање које се налази у тачки C (Сл.5.2):**

Силе које делују на наелектрисање Q_C:



Слика 5.2

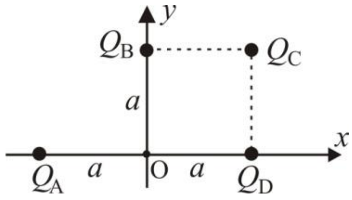
$$F_A = k_0 \frac{|Q_A| Q_C}{a^2} = 28.125\,\mu N; \qquad F_B = k_0 \frac{|Q_B| Q_C}{b^2} = 90\ \mu N.$$

Вектор силе на наелектрисање Q_{C} је:

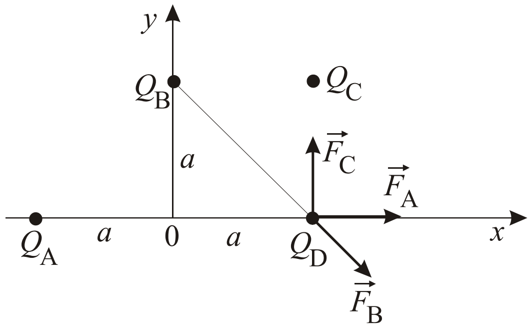
$$\vec{F}_{\mathrm{C}}=\vec{F}_{\mathrm{A}}+\vec{F}_{\mathrm{B}}=F_{\mathrm{A}}\hat{x}-F_{\mathrm{B}}\hat{y}\,,$$

$$F_{\mathrm{C}}=\sqrt{F_{\mathrm{A}}^2+F_{\mathrm{B}}^2}=94.3\ \mu\mathrm{N}\,,\ \alpha=\arctan\frac{F_{\mathrm{B}}}{F_{\mathrm{A}}}=-72.7^\circ\,.$$

6. Тачкаста наелектрисања Q_{A}, Q_{B}, Q_{C} и Q_{D} распоређена су у вакууму као на сл. 6. Одредити резултујућу силу на наелектрисање Q_{D}. Нумерички подаци: $Q_{\mathrm{A}}=2\mathrm{nC}$, $Q_{\mathrm{B}}=4\mathrm{nC}$, $Q_{\mathrm{C}}=-\sqrt{2}\mathrm{nC}$, $Q_{\mathrm{D}}=1\mathrm{nC}$, $a=0.3\mathrm{m}$.



Слика 6



Слика 6.1

На основу оријентације вектора на слици 6.1 могуће је писати:

$$F_{\mathrm{A}}=k_0\frac{Q_{\mathrm{A}}Q_{\mathrm{D}}}{4a^2}\,,\qquad F_{\mathrm{B}}=k_0\frac{Q_{\mathrm{B}}Q_{\mathrm{D}}}{2a^2}\,,\qquad F_{\mathrm{C}}=k_0\frac{|Q_{\mathrm{C}}|Q_{\mathrm{D}}}{a^2}\,;$$

$$F_{\mathrm{A}x}=F_{\mathrm{A}}\,,$$

$$F_{\mathrm{A}y}=0\,,$$

$$F_{\mathrm{B}x}=F_{\mathrm{B}}\cos 45^\circ,$$

$$F_{\mathrm{B}y}=-F_{\mathrm{B}}\sin 45^\circ,$$

$$F_{\mathrm{C}x}=0\,,$$

$$F_{\mathrm{C}y}=F_{\mathrm{C}}\,,$$

$$F_{\mathrm{D}x}=F_{\mathrm{A}x}+F_{\mathrm{B}x}+F_{\mathrm{C}x}=191.42\mathrm{nN}\,,$$

$$F_{\mathrm{D}y}=F_{\mathrm{A}y}+F_{\mathrm{B}y}+F_{\mathrm{C}y}=0\,,$$

$$\vec{F}_{\mathrm{D}}=F_{\mathrm{D}x}\hat{x}+F_{\mathrm{D}y}\hat{y}=191.42\,\hat{x}\,[\mathrm{nN}].$$